Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

Tipo B
MATEMATICAS I (MA–1111)
Primer Parcial (14 de octubre de 2005)

1. (6 puntos) Resuelva la siguiente desigualdad

$$\frac{|2x-3|-x}{x-2} \leq 1.$$

Solución: Tenemos que

$$\frac{|2x-3|-x}{x-2} \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{|2x-3|-x}{x-2} - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{|2x-3|-2x+2}{x-2} \leq 0.$$

Si $x \geq \frac{3}{2}$ entonces

$$\frac{|2x-3|-2x+2}{x-2} = \frac{2x-3-2x+2}{x-2} = \frac{-1}{x-2} \leq 0,$$

i.e.,

$$\frac{1}{x-2} > 0.$$

En este caso la solución es

$$(2,\infty) \cap \left[\frac{3}{2},\infty\right) = (2,\infty).$$

Si $x < \frac{3}{2}$

$$\frac{|2x-3|-2x+2}{x-2} = \frac{-2x+3-2x+2}{x-2} = \frac{-4x+5}{x-2} \leq 0,$$

i.e.,

$$\frac{4x-5}{x-2} > 0.$$

En esta caso la solución es

$$\left\{\left(-\infty,\frac{5}{4}\right] \cup (2,\infty)\right\} \cap \left(-\infty,\frac{3}{2}\right) = \left(-\infty,\frac{5}{4}\right].$$

Finalmente, tenemos que la solución es

$$\left(-\infty,\frac{5}{4}\right] \cup (2,\infty).$$

2. (2 puntos) Diga cual(es) de los puntos $(2,3)$ y $(-1,2)$ pertenece a la circunferencia $x^2+y^2-x-3y=0$.

Solución:

$$(2)^2+(3)^2-(2)-3*(3)=4+9-2-9=2.$$
$$(2,3) \text{ no está en la circunferencia}$$
$$(-1)^2+(2)^2-(-1)-3*(2)=1+4+1-6=0.$$
$$(-1,2) \text{ si está en la circunferencia}$$

3. (2 puntos) Halle el centro y el radio de la circunferencia $x^2+y^2+5x-4y=0$.

Solución: Completando cuadrados tenemos:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+5x-4y&=0 \\ x^2+5x+(5/2)^2+y^2-4y+2^2&=(5/2)^2+2^2 \\ (x+5/2)^2+(y-2)^2&=41/4 \end{aligned}$$

El centro es $(-5/2,2)$ y el radio es $\frac{\sqrt{41}}{2}$.

4. (2 puntos) Halle la distancia del punto $(-1,2)$ al punto de intersección de las rectas

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4y &=& x+1 \\ 3y &=& x-1. \end{array}\right.$$

Solución: El punto intersección es: $y=2$, $x=7$, la distancia es:

$$\text{dist } = \sqrt{(7-(-1))^2+(2-2)^2}=\sqrt{8^2}=8.$$

5. (2 puntos) Halle la ecuación de la recta perpendicular a la recta $3y=7-x$ que pasa por el origen.

Solución: La recta dada tiene pendiente $-1/3$, por lo tanto la recta perpendicular tiene pendiente 3 y como pasa por $(0,0)$.

$$\begin{aligned} y-0&=3(x-0) \\ y&=3x \end{aligned}$$

6. (3 puntos) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(5,3)$ y $(7,5)$ y cuyo centro se encuentra en la recta $x=y$.

Solución: Sea (h,k) el centro y r el radio, entonces $k=h$ y

$$\begin{aligned} (5-h)^2+(3-k)^2&=r^2 \\ (7-h)^2+(5-k)^2&=r^2 \end{aligned}$$

igualando y sustituyendo $h=k$, obtenemos

$$\begin{aligned} (5-h)^2+(3-h)^2&=(7-h)^2+(5-h)^2 \\ (3-h)^2&=(7-h)^2 \\ 9-6h+h^2&=49-14h+h^2 \\ 9-6h&=49-14h \\ 8h&=40 \\ h&=5 \end{aligned}$$

entonces el centro es $(5,5)$ y el radio es $\sqrt{(5-5)^2+(3-5)^2}=2$ y la ecuación

$$(x-5)^2+(y-5)^2=4$$

7. (5 puntos) Sean $f(x)=|x|$, $g(x)=x+1$ y $h(x)=x^2-3$

   a) Halle la fórmula de $F=h\circ g\circ f$.

   b) Halle $F(-1)$ y halle todos los valores de x (si existen) cuya imagen según F es cero.

   Solución:

   a)

$$\begin{aligned} h\circ g\circ f(x) &= h\circ g(|x|)\\ &= h(|x|+1)\\ &= (|x|+1)^2-3 \end{aligned}$$

   b)

$$F(-1)=(|-1|+1)^2-3=2^2-3=1.$$

$$\begin{aligned} F(x)=0 &\iff (|x|+1)^2-3=0\\ &\iff (|x|+1)^2=3\\ &\iff |x|+1=\pm\sqrt{3}\\ &\iff |x|=-1\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

   $|x|=-1-\sqrt{3}$ no tiene sentido, ya que $-1-\sqrt{3}<0$

$$|x|=-1+\sqrt{3}\iff x=\pm(-1+\sqrt{3})$$

   Sólo existen dos soluciones $x=1-\sqrt{3}$ y $x=\sqrt{3}-1$.

8. (2 puntos) Demuestre que $\cos(\operatorname{arcsen}(x))=\sqrt{1-x^2}$ para $-1\le x\le 1$.

   Solución:

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{arcsen}(x)) &= \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}(x))}\\ &= \pm\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

   El signo debe ser positivo ya que si $-1\le x\le 1$, entonces $-\pi/2\le \operatorname{arcsen}(x)\le \pi/2$ y por lo tanto, $0\le \cos(\operatorname{arcsen}(x))\le 1$

9. (6 puntos) Sean

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{3} & \text{si} \quad |x|=1\\[2ex] \dfrac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad |x|<1\\[2ex] 3x & \text{si} \quad 1<|x|. \end{cases}$$

   y $g(x)=\operatorname{sen}(x)$ si $|x|\le\frac{\pi}{2}$.

a) Encuentre $f \circ g$ y determine su dominio.

b) Grafique $f \circ g$ y determine su rango.

Solución: Tenemos

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3} & \text{si} \quad |\operatorname{sen}(x)| = 1 \\[2ex] \dfrac{|\operatorname{sen}(x)|}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}} & \text{si} \quad |\operatorname{sen}(x)| < 1 \\[2ex] 3\operatorname{sen}(x) & \text{si} \quad 1 < |\operatorname{sen}(x)|. \end{cases}$$

Primero $g(x) = \operatorname{sen}(x) = 1 \Leftrightarrow |x| = \frac{\pi}{2}$. Luego $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{\pi}{2}$. Por último $|\operatorname{sen}(x)| > 1$ no se cumple para ningun valor de x. De aqui nos queda:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3} & \text{si} \quad |x| = \frac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{|\operatorname{sen}(x)|}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}} = |\tan(x)| & \text{si} \quad |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Asi $Dom(f \circ g) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De la gráfica de $|\tan(x)|$ se obtiene que

$$Rang(f \circ g) = [0, \infty) \cup \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$